	1	2	3	4	N
1/6	A	A	A	A	10

¡Felicitaciones!

A

1. a. Falso

Por definición,

$$\Gamma_1 \subseteq Con(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \iff \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \models \varphi \quad \forall \varphi \in \Gamma_1$$

Sea $\Gamma_1 = \{\varphi\}$, $\Gamma_2 = \emptyset$ con $\not\models \varphi$

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \quad \text{pero} \quad \emptyset \not\models \varphi$$

las tautologías

$$\Rightarrow \underline{\Gamma_1 \not\subseteq Con(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)} \;\square$$

b. ~~Falso~~

~~Sea $\Gamma_1 = \emptyset$, $\Gamma_2 = \{\varphi\}$ con $\not\models \varphi$~~

~~Sea $\Gamma_1' = \Gamma_1 \cup \{\alpha \to \beta \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}$~~

~~Como $\Gamma_1 = \emptyset$, $\Gamma_1' = \emptyset$~~

~~$\Rightarrow \Gamma_1' \not\models \varphi \Rightarrow \varphi \notin Con(\Gamma_1')$~~

~~Pero por otro lado,~~

~~$\Gamma_2 \cup \Gamma_1 = \Gamma_2 \models \varphi \Rightarrow \varphi \in Con(\Gamma_2 \cup \Gamma_1)$~~

~~$\Rightarrow Con(\Gamma_1') \neq Con(\Gamma_2 \cup \Gamma_1)$~~ $\square$

$\Gamma_1 \neq \emptyset \ldots$

c. Falso

Sean $\Gamma_1 = \{\varphi\}$, $\Gamma_2 = \{\varphi \wedge \psi\}$ con $\not\models \varphi$ y $\not\models \psi$

Sabemos que $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ es una Tautología

Por el lema de la práctica 4, ej 8.a,

$Con(\{\beta\}) \subseteq Con(\{\alpha\})$ sii $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología

$\Rightarrow Con(\{\varphi\}) \subseteq Con(\{\varphi \wedge \psi\})$

$\Rightarrow \underline{Con(\Gamma_1) \subseteq Con(\Gamma_2)}$

pero $\underline{\Gamma_1 \nsubseteq \Gamma_2}$, por lo que el lema ~~no~~ no es válido. ¡ ✓

por lo que (c) es falso ¡¡, el lema es verdadero

d. Falso

Sean $\Gamma_1 = \{\varphi\}$, $\Gamma_2 = \{\psi\}$, con $\varphi \not\models \psi$ por ej, $\varphi = p$, $\psi = q$

$\Gamma' = \{\alpha \wedge \beta \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\} = \{\varphi \wedge \psi\}$

~~Sabemos~~

Sabemos que

$\varphi \wedge \psi \models \psi \Rightarrow \Gamma' \models \psi \Rightarrow \underline{\psi \in Con(\Gamma')}$

Pero ojo, ¿y si $\varphi = p$ y $\psi = \neg p$? Ahí sí vale

$\varphi \not\models \psi \;\boxed{\Rightarrow}\; \Gamma_1 \not\models \psi \Rightarrow \underline{\psi \notin Con(\Gamma_1)}$

$\Gamma_1 \models \neg p$

$\Gamma_1 \models p$

Por lo tanto,

$\underline{Con(\Gamma') \nsubseteq Con(\Gamma_1)}$

(Γ_1 es inconsistente, $CON(\Gamma_1) = FORM$)

NO sirve este contraejemplo.

$\Gamma_1 = \{p\}$

$\Gamma_2 = \{q\}$ sirve

1.6. Verdadero ~~[illegible]~~. Dados $\Gamma_1 \neq \emptyset, \Gamma_2$; sea $A = \{\alpha \to \beta \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}$

Probemos ambas contenciones.

$\subseteq$

~~Veamos que $\Gamma_1 \cup A$~~

Veamos que $\Gamma_1 \cup A \subseteq Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$

Sea $\varphi \in \Gamma_1 \cup A$.

Caso 1: $\varphi \in \Gamma_1$

$\Gamma_1 \vDash \varphi \Rightarrow \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vDash \varphi \Rightarrow \varphi \in Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ ¿por qué?

Caso 2: $\varphi \in A$; $\varphi = \alpha \to \beta$ con $\alpha \in \Gamma_1$, $\beta \in \Gamma_2$

$\Gamma_2 \vDash \beta \Rightarrow \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vDash \beta \Rightarrow \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vDash \alpha \to \beta = \varphi \Rightarrow \varphi \in Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$

Teorema de la deducción

Como $\varphi \in Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ $\forall \varphi \in \Gamma_1 \cup A$; $\Gamma_1 \cup A \subseteq Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$

~~Ademas, como $\Gamma_1 \cup A \subseteq Con(\Gamma_1 \cup A)$~~

Ademas, como $Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = Con(Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2))$ — práctica

y $\forall A, B \subseteq FORM$, $A \subseteq B \Rightarrow Con(A) \subseteq Con(B)$, — práctica

$Con(\Gamma_1 \cup A) \subseteq Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$

$\supseteq$ Veamos que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq Con(\Gamma_1 \cup A)$. Sea $\varphi \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

Caso $\varphi \in \Gamma_1$: $\Gamma_1 \vDash \varphi \Rightarrow \Gamma_1 \cup A \vDash \varphi \Rightarrow \varphi \in Con(\Gamma_1 \cup A)$

Caso $\varphi \in \Gamma_2$: Como $\Gamma_1 \neq \emptyset$, $\exists \alpha \in \Gamma_1$ y $\alpha \to \varphi \in A$

Como $\Gamma_1 \cup A \vDash \alpha$ y $\Gamma_1 \cup A \vDash \alpha \to \varphi$; $\varphi \in Con(\Gamma_1 \cup A)$.

~~Por lo tanto, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq Con(\Gamma_1 \cup A)$ y por~~

Por lo tanto, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq Con(\Gamma_1 \cup A)$ y por el razonamiento anterior, $Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \subseteq Con(\Gamma_1 \cup A)$

Finalmente, concluimos que $\underline{\mathrm{Con}(P_1 \cup A) = \mathrm{Con}(P_1 \cup P_2)}$ □

(a) ✓
(b) ✓
(c) ✓
(d) no sirve el contraejemplo

(A)

3/6

2. Probemos ambas implicaciones:

$\Rightarrow$)

Sea $\Gamma \subseteq FORM$ tq $Con(\Gamma)$ es m.c.

Para cada $p \in PROP$,

Por m.c., $p \in Con(\Gamma)$ o bien $\neg p \in Con(\Gamma)$ ✓

$\Rightarrow \Gamma \models p$ o bien $\Gamma \models \neg p$ ✓

Necesitamos probar existencia y unicidad:

existencia:

y $Con(\Gamma)$ satisf $\Rightarrow \Gamma$ satisf, por ej 9 ó práctica 4 ✓

Como $Con(\Gamma)$ es consistente, es tambien satisfacible, por lo que existe una valuación v tq $v \models \Gamma$ ✓

unicidad:

sean v_1, v_2 valuaciones tq $v_1 \models \Gamma$ y $v_2 \models \Gamma$ y $v_1 \neq v_2$

como $v_1 \neq v_2$, $\exists p \in PROP$ tq $v_1(p) \neq v_2(p)$ ✓

spdg, $\begin{cases} v_1(p) = 1 \\ v_2(p) = 0 \end{cases}$ ✓. Veamos los dos casos $\Gamma \models p$ y $\Gamma \models \neg p$

~~Supongamos~~

$\boxed{\Gamma \models p}$ como $v_2(p)=0$, $v_2 \not\models \Gamma$ Absurdo ✓

$\boxed{\Gamma \models \neg p}$ como $v_1(p)=1 \Rightarrow \underbrace{v_1(\neg p)=0}$ $\Rightarrow v_1 \not\models \Gamma$ Absurdo ✓

formalmente esto no es correcto (v: Prop $\to \{0,1\}$ y $\neg p \notin$ Prop). Debería ser $v_1 \not\models \neg p$.

Por lo tanto, $v_1 = v_2$ ✓

Finalmente, $\exists! \, v$ tq $v \models \Gamma$ ✓

NOTA

$\boxed{\Leftarrow}$

Sea v la única valuación de Γ ? tq $v \models \Gamma$ ✓

Sea $p \in PROP$

Si $v(p)=1$: $\Gamma \not\models \neg p$ pues $v \models \Gamma$ ✓

$\Gamma \models p$ pues en caso contrario, $v(p=0)$ sería una valuación válida de Γ, pero v es única. ✓

Si $v(p)=0$:

$\Gamma \not\models p$ pues $v \models \Gamma$ ✓

$\Gamma \models \neg p$ pues en caso contrario $v(p=1)$ sería una valuación válida de Γ, pero v es única. ✓

Como vemos, $\begin{cases} p \in Con(\Gamma) \Leftrightarrow v(p)=1 \\ \neg p \in Con(\Gamma) \Leftrightarrow v(p)=0 \end{cases} \quad \forall p \in PROP$ ✓

Usaremos el siguiente lema, que demostraremos luego:

Lema 1: $\Gamma \models p$ o bien $\Gamma \models \neg p$ $\forall p \in PROP \Rightarrow \Gamma \models \varphi$ o bien $\Gamma \models \neg\varphi$ $\forall \varphi \in FORM$ ✓

por el lema anterior, $\varphi \in Con(\Gamma)$ o bien $\neg\varphi \in Con(\Gamma)$ $\forall \varphi \in FORM$ ✓

por lo tanto $Con(\Gamma)$ es maximal (¿maximal qué?)

Además, como Γ es satisfacible por v, $Con(\Gamma)$ es consistente. ✓

Finalmente, $Con(\Gamma)$ es m.c. ✓ $\square$

(Sigue.)

Este argumento es un poco débil. No es trivial que si Γ es consistente y $(\forall\varphi)$ $\Gamma \models \varphi$ o $\Gamma \models \neg\varphi \Rightarrow \Gamma$ m.c.

Demostración del Lema 1: Sea $\Gamma \in FORM$,

$\Gamma \models p$ o bien $\Gamma \models \neg p \ \forall p \in PROP \Rightarrow \Gamma \models \varphi$ o bien $\Gamma \models \neg\varphi \ \forall \varphi \in FORM$

Por inducción en la complejidad de φ.

Caso base: $\varphi \in PROP \overset{\text{hipótesis}}{\Rightarrow} \Gamma \models \varphi$ o bien $\Gamma \models \neg\varphi$ ✓

Paso inductivo:

- $\underline{\varphi = \neg\psi} \overset{HI}{\Rightarrow} \Gamma \models \psi = \neg\varphi$ o bien $\Gamma \models \neg\psi = \varphi$ ✓

- $\underline{\varphi = \psi_1 \to \psi_2}$

  - Si $\Gamma \models \psi_2$ y $\Gamma \not\models \neg\psi_2 \Rightarrow \Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \not\models \neg\varphi$ ✓ → triviales
  - Si $\Gamma \models \neg\psi_2$ y $\Gamma \not\models \psi_2 \Rightarrow$
    - Si $\Gamma \models \psi_1$ y $\Gamma \not\models \neg\psi_1 \Rightarrow \Gamma \models \neg\varphi$ y $\Gamma \not\models \varphi$ ✓ →
    - Si $\Gamma \models \neg\psi_1$ y $\Gamma \not\models \psi_1 \Rightarrow \Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \not\models \neg\varphi$ ✓ → No son

5/6

3. Sea $A = \{ y \mid ((\forall x)\, f(x) \neq y) \}$

Veamos por absurdo la demostración:

Supongamos que tengo un $\varphi \in FORM(\mathcal{L})$ que expresa la propiedad.

φ: A es finito

Definamos las fórmulas φ_i que expresen

φ_i: hay por lo menos i elementos en A

$\varphi_i = (\exists x_1 \dots x_i)\left(\text{todosDistintos}(x_1 \dots x_i) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{i} (\forall x)\, f(x) \neq x_j\right)\right)$

Veamos que el conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\varphi_i : \forall i \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi\}$ sería satisfacible e insatisfacible (probando el absurdo).

<u>Satisfacible</u>

Tomemos cualquier conjunto finito $\Gamma' \subseteq \Gamma$.

Sea $k = \max(\{i / \varphi_i \in \Gamma'\} \cup \{1\})$ (como Γ' es finito existe el máximo).

Sea $B = \langle \mathbb{N}, f_B \rangle$ una $\mathcal{L}$-estructura con

$f_B(x) = x + k$

Vemos que $A = \{1 \dots k\}$.

B satisface φ_i $\forall \varphi_i \in \Gamma'$ pues hay $k \geq i$ elementos en A

B satisface φ pues hay a lo sumo k elementos en A

Por lo tanto B satisface todas las fórmulas de Γ' (φ podría no estar).

Por lo que Γ' es satisfacible.

Ahora, como cualquier subconjunto finito de Γ es satisfacible por compacidad <u>Γ es satisfacible</u>.

Insatisfacible

Por absurdo; sea $\mathcal{B}$ una $\mathcal{L}$-estructura que satisfaga Γ.
¿Y la valuación?

Como $\mathcal{B}$ satisface φ, A es finito por lo que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|A| < k$.

Pero además $\mathcal{B}$ satisface φ_k por lo que $|A| \geq k$.

Por lo tanto, Γ es insatisfacible

Finalmente, como probamos el absurdo, no hay forma de expresar la propiedad en primer orden. $\square$

6/6

4.a) ~~Falso~~

Sean $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{L}$-estructuras tal que $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2 \neq \mathcal{C}_1$ *

Sea Γ conj de axiomas correcto y completo respecto de $\mathcal{C}_1$.

Tomemos un un modelo $A \in \mathcal{C}_2$. Como $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$, $A \in \mathcal{C}_1$

entonces como Γ es completo respecto de $\mathcal{C}_1$, A satisface Γ.

Como cualquier modelo en $\mathcal{C}_2$ satisface Γ, Γ es completo respecto de $\mathcal{C}_2$. $\square$

* Un caso particular podría ser:

$\mathcal{L} = \{P\}$ con P binaria

$\mathcal{C}_1$ la clase de todos los $\mathcal{L}$-estructuras

$\mathcal{C}_2$ la clase de estructuras transitivas

$\Gamma = SQ$

b)

~~Verdadero~~

Sean $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ tq $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$

Tomemos $\varphi \in \Gamma_2$. Quiero ver que $\varphi \in \Gamma_1$.

Como $\varphi \in \Gamma_2$, $\mathcal{C}_2 \models \varphi$ por lo que es verdadera para cualquier estructura en $\mathcal{C}_2$.

Como $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, φ es verdadera también para cualquier modelo en $\mathcal{C}_1$, por lo que $\mathcal{C}_1 \models \varphi$. Esto es, $\varphi \in \Gamma_1$.

Finalmente, como $\varphi \in \Gamma_1$ $\forall \varphi \in \Gamma_2$, $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$.